线性方程组解结构

福建师大数学与计算机科学学院
张圣贵

例：求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+7x_2+x_3+3x_4+2x_5+2x_6+4x_7+6x_8+9x_9 = 0 \\ 5x_1+7x_2+5x_3+9x_4+2x_5+8x_6+3x_7+x_8+3x_9 = 0 \\ 4x_1+7x_2+7x_3+2x_4+x_5+2x_6+3x_7+x_8+2x_9 = 0 \\ 4x_1+5x_2+9x_3+8x_4+x_5+2x_6+4x_7+5x_8+9x_9 = 0 \\ 2x_1+6x_2+3x_3+9x_4+6x_5+10x_6+4x_7+9x_8+2x_9 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

解：在命令窗口输入：

```
A=[ 1     7     1     3     2     2     4     6     9
    5     7     5     9     2     8     3     1     3
    4     7     7     2     1     2     3     1     2
    4     5     9     8     1     2     4     5     9
    2     6     3     9     6    10     4     9     2 ];
 B=rref(A)
```

得到

```
  B =
       1     0     0     0     0    893/429    -137/142    -590/191    -1443/305
       0     1     0     0     0   -328/809     153/256     353/438      553/279
       0     0     1     0     0   -147/194      77/232      75/86        99/101
       0     0     0     1     0     31/264      85/333     78/121      1214/809
       0     0     0     0     1    166/105     -25/158      17/53      -751/267
```

在命令窗口输入：

```
B1=-B(:,6)
B2=-B(:,7)
B3=-B(:,8)
B4=-B(:,9)
```

得到

```
B1 =

   -893/429
    328/809
    147/194
    -31/264
   -166/105


B2 =

    137/142
   -153/256
    -77/232
    -85/333
     25/158


B3 =

    590/191
   -353/438
```

```
     -75/86
     -78/121
     -17/53


B4 =


    1443/305
    -553/279
     -99/101
   -1214/809
     751/267
```

则方程组的一个基础解系为

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= (-893/429, 328/809, 147/194, -31/264, -166/105, 1, 0, 0, 0)^T, \\
\eta_2 &= (137/142, -153/256, -77/232, -85/333, 25/158, 0, 1, 0, 0)^T, \\
\eta_3 &= (590/191, -353/438, -75/86, -78/121, -17/53, 0, 0, 1, 0)^T, \\
\eta_4 &= (1443/305, -553/279, -99/101, -1214/809, 751/267, 0, 0, 0, 1)^T.
\end{aligned}$$

习题：求线性方程组

$$\begin{cases}
8x_1 + 15x_2 - 3x_3 - 8x_4 - x_5 - 4x_6 + 5x_7 + 6x_8 + 10x_9 - 12x_{10} &= 0 \\
2x_1 + 11x_2 - 8x_3 - 2x_4 - x_5 - x_6 - 9x_7 - 2x_8 - 16x_9 + 3x_{10} &= 0 \\
-10x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 15x_6 - 2x_7 - 21x_8 - x_9 - 4x_{10} &= 0 \\
13x_1 - 13x_2 + 15x_3 - 9x_4 - 6x_5 - 6x_6 - 6x_7 + x_8 - 7x_9 + x_{10} &= 0 \\
3x_1 - x_2 - 5x_3 - 12x_4 - x_5 - 13x_6 + 5x_7 16x_8 - 10x_9 - 4x_{10} &= 0
\end{cases}$$

的一个基础解系.